2023

Provincia de Buenos Aires

Dirección General de Cultura y Educación

INSTITUTO SUPERIOR DE FORMACIÓN TECNICO Nº196

MÓDULO CURSO INICIAL

TECNICATURA SUPERIOR EN MANTENIMIENTO INDUSTRIAL
TECNICATURA SUPERIOR EN SEGURIDAD E HIGIENE
TECNICO SUPERIOR EN CONSTRUCCIONES NAVALES

Presentación

Para poder encarar con éxito los estudios de tecnicatura es necesario tener una formación sólida en ciencias.
El objetivo de este módulo es, precisamente es guiar a los alumnos ingresantes para que adquieran los conceptos de la matemática elemental necesarios para continuar sus estudios superiores.
En este aspecto, es nuestra intención iniciar un camino juntos, breve en el tiempo, pero que queremos se fructífero en cuanto a resultados que te permitan iniciar tus estudios desde la base del conocimiento más sólida.
La forma de estudiar matemáticas es un aspecto que es de nuestro interés recalcar. El estudio de la matemática no puede medirse en cantidad de hojas leídas, sino en la forma que se han comprendido los temas. Así, una primera lectura es importante comprender. Pero es necesario que comprender no es saber, aunque es una etapa previa al conocimiento y dominio de las ideas. Luego de esa primera lectura comprensiva viene un proceso más arduo que es incorporar el conocimiento de lo comprendido. En este momento el mejor auxiliar es el papel y el lápiz. En esta etapa, que es más lenta, el avance será en profundidad más que en cantidad y es importante que le dediques el tiempo suficiente. Los conceptos matemáticos no se desarrollan en unos pocos días, sino que requieren un tiempo de maduración. La resolución de ejercitación es necesaria y es un trabajo personal en el cual, en un principio, no conviene saltear pasos. Las dudas que seguramente surgirán es conveniente anotarlas para consultarlas con los profesores en los encuentros programados, quienes te ayudaran con gusto.
Es importante que comprendas que es una tarea conjunta en la cual tus docentes colaborarán en tu aprendizaje, pero este depende fundamentalmente de tu esfuerzo.
Para ayudarte a nivelar tus conocimientos y prepararte para este nuevo desafío te proponemos resolver éste módulo con los contenidos considerados mínimos para ingresar a las carreras.

PARA RESOLVERLO PODRÁS BUSCAR INFORMACIÓN EN LA WEB, EN LIBROS DE TEXTOS, ETC.

<u>LOS CONTENIDOS SON:</u>

- ✓ BLOQUE 1: NUMEROS REALES
- ✓ BLOQUE 2: PROPORCIONALIDAD - PORCENTAJE
- ✓ BLOQUE 3: FUNCIONES
- ✓ BLOQUE 4: FUNCION CUADRATICA I
- ✓ BLOQUE 5: FUNCION CUADRATICA II
- ✓ BLOQUE 6: POLINOMIOS - FACTORIZACION
- ✓ BLOQUE 7: TRIGONOMETRIA

NÚMEROS REALES

1) Completar los espacios con cruces, según corresponda:

	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{I}$	$\mathbb{R}$
0,2565656…					
2 + $\sqrt{3}$					
$\sqrt[4]{64}$					
$\sqrt{-4}$					
- 5					
$\frac{3}{2}$					
2,93					
0,0102030405…					
$\frac{10}{5}$					
$\sqrt[3]{-27}$					
7 - 12					
0					
$\sqrt{8}$					

2) Decidir si las siguientes afirmaciones son V o F; en caso de falsedad exhiban un contraejemplo:
1. La unión del conjunto de los números enteros con el de los racionales forman el conjunto de los números reales.
2. Todo número real es racional.
3. Todo número racional es entero.
4. Todo número irracional es real.
5. Existen números reales que al elevarlos al cuadrado dan negativos.
6. Existen "huecos" en la recta numérica que no son ocupados por ningún número real.
7. Si a y b son números reales, entonces a es mayor que b o b es mayor que a.
8. Todo número natural es real.
9. Siempre consigo un resultado al calcular la raíz cuadrada de un número real.
10. La suma de un racional con un irracional es un número racional.
11. La multiplicación entre dos números irracionales puede dar un número racional.

3) Calcular aplicando las propiedades correspondientes.

$a)\ \sqrt{2}\,.\sqrt{10}.\sqrt{5} =$

$b)\ \sqrt{125} :\ \sqrt{5} =$

$c)\ \sqrt[4]{3^6} =$

$d)\ \sqrt{90} :\ \left(\sqrt{2}.\sqrt{5}\right) =$

$e)\ \sqrt[3]{\sqrt{a^{12}}} =$

$f)\ \sqrt[3]{2}.\left(\sqrt[3]{8} : \sqrt[3]{2}\right) =$

$g)\ \sqrt{\sqrt{\frac{1}{a^{12}}}} =$

$h)\ \left(\sqrt{12}.\sqrt{6}\right) : \sqrt{2} =$

4) Simplificar al máximo cada expresión, extrayendo factores del radical:

$a)\ \sqrt{27}$

$b)\ \sqrt{45}$

$c)\ \sqrt{252}$

$d)\ \sqrt[3]{32}$

$e)\ \sqrt{684}$

$g)\ \sqrt{8x^6a^3}$

$H)\ \sqrt[3]{8a^3x^4}$

$i)\ \sqrt{200a^5b^7m^6}$

$j)\ \sqrt[4]{10000a^8b^8y^3}$

5) Realizar las siguientes sumas algebraicas entre radicales:

a) $\sqrt{45}-\sqrt{27}-\sqrt{20}=$
b) $\sqrt{75}-\sqrt{147}-\sqrt{675}-\sqrt{12}$
c) $\sqrt{175}-\sqrt{243}-\sqrt{63}-2\sqrt{75}=$
d) $\frac{2}{9}\sqrt{20}-\sqrt{45}-\frac{3}{7}\sqrt{125}-\sqrt{98}=$
e) $7\sqrt{450}-\sqrt{320}-\frac{14}{3}\sqrt{80}-\frac{2}{5}\sqrt{800}=$
f) $\sqrt[3]{54}-\sqrt[3]{24}+\frac{3}{28}\sqrt[3]{16}=$
g) $\sqrt[3]{875}-\frac{1}{7}\sqrt[3]{448}+\frac{35}{8}\sqrt[3]{189}=$
h) $\sqrt[3]{40}-\sqrt[3]{625}+\sqrt[3]{135}+\frac{\sqrt[3]{5}}{2}=$

6) Resolver aplicando propiedad distributiva:

1. $(\sqrt{5}+2).(\sqrt{5}+2)=$
2. $(2\sqrt{3}+4\sqrt{2}).(2\sqrt{3}-4\sqrt{2})=$
3. $(\sqrt{7}-4)^2=$
4. $(\sqrt{5}+\sqrt{3})^2=$

7) Resolver las operaciones indicadas, trabajando los radicales hasta su mínima expresión

$a)\ \sqrt{2}\,.\sqrt{8}=$
$b)\ \sqrt{ab}\,.\sqrt{a}=$
$c)\ \sqrt{ab^3}\,.\sqrt{ab}=$
$d)\ \sqrt[4]{20}\,.\sqrt{10}\,.\sqrt[3]{200}=$
$e)\ \sqrt[4]{8}\,.\sqrt[3]{32}\,.\sqrt[3]{16}\,.\sqrt[5]{81}=$
$f)\ \left(6\sqrt{5}-3\sqrt{10}\right)^2=$
$g)\ \sqrt[3]{9}\,.\sqrt[4]{32}\,.\sqrt[3]{16}\,.\sqrt[4]{9}=$
$h)\ \left(2\sqrt{5}+4\sqrt{8}\right)^2=$
$i)\ \left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right).\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)=$
$j)\ \left(\sqrt{12}-2\sqrt{6}\right)^2=$

8) Racionalizar los denominadores

$a)\ \frac{2}{\sqrt{7}}=$
$b)\ \frac{1}{\sqrt{3}}=$
$c)\ \frac{5}{\sqrt{15}}=$
$d)\ \frac{12}{\sqrt{6}}=$
$e)\ \frac{3}{2\sqrt{5}}=$
$f)\ \frac{2}{4\sqrt{8}}=$
$g)\ \frac{2a}{\sqrt{3ax}}=$
$h)\ \frac{5b}{\sqrt{7b}}=$
$j)\ \frac{2}{\sqrt[3]{5}}=$
$k)\ \frac{3}{\sqrt[3]{16}}=$
$l)\ \frac{2}{\sqrt[6]{16}}=$
$m)\ \frac{5}{\sqrt[3]{4}}=$
$n)\ \frac{8}{\sqrt[5]{16}}=$
$o)\ \frac{6}{\sqrt[3]{2}}=$
$p)\ \frac{9}{\sqrt[3]{9a}}=$
$q)\ \frac{3}{\sqrt[6]{a^5.b^6.c^2}}=$
$s)\ \frac{2}{\sqrt{3}-11}=$
$t)\ \frac{5}{\sqrt{2}+3}=$
$u)\ \frac{3}{4-\sqrt{2}}=$
$v)\ \frac{2}{1-\sqrt{7}}=$
$w)\ \frac{-5}{\sqrt{5}+1}=$
$x)\ \frac{6}{2-\sqrt{3}}=$
$y)\ \frac{10}{\sqrt{2}+5}=$
$z)\ \frac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}=$

$i)\ \dfrac{2ab}{\sqrt{8ab}} =$ $\qquad$ $r)\ \dfrac{3n}{\sqrt[3]{n^2m}} =$

9) Realizar las siguientes operaciones aplicando propiedades.

$a)\ \dfrac{3^{1/2} : 3}{(3^2)^{-1/2}} =$

$b)\ \dfrac{8 :\ 2^4}{16 \,.\, 2^5} =$

$c)\ \left(\dfrac{2}{3}\right)^3 . \left(\dfrac{2}{3}\right)^{-2} . \left(\dfrac{3}{2}\right) =$

$d)\ \left\{\dfrac{[(-2)^3]^2}{3}\right\}^{-1} =$

$e)\ \left[\left(2^{4/9}\right)^{1/2}\right]^{-3} : [(2^{-1})^2]^{-1/3} =$

$f)\ \sqrt[3]{\left[\sqrt{\dfrac{1}{5}} .\ 5^{3/2} . \left(\dfrac{1}{5}\right)^{-1/3}\right]^{-2}} =$

$g)\ \left(2^{1/2}\right)^{3/2} . \left(\sqrt{2^5}\right)^{-2} =$

10) Resolver las siguientes ecuaciones

$a)\ \sqrt{3x-1} = 2$

$b)\ x^2 - \sqrt{3}x = 0$

$c)\ (3x-1)^2 = 6$

$d)\ \left(x + 2\sqrt{10}\right)\left(x - \sqrt{40}\right) = \sqrt[3]{3^6}$

$e)\ x - \dfrac{1}{3}\sqrt{2} = \dfrac{3}{\sqrt{2}+1} - \dfrac{2}{1-\sqrt{2}}$

$f)\ \dfrac{x}{\sqrt{24}} + \dfrac{1}{5}\left(\sqrt{6} - 2\right) = \dfrac{-3}{1+\sqrt{6}}$

11) Hallar el módulo o valor absoluto de los siguientes números reales:

$a)\ \left|\sqrt{\frac{4}{9}}\right| =$ ....

$b)\ |(-6)^3| =$ ....

$c)\ \left|\sqrt[3]{-27}\right| =$ ....

$d)\ \left|\left(-\frac{2}{5}\right)^{-1}\right| =$ ....

$e)\ |-1-8| + 0{,}2 =$ ....

$f)\ \frac{1}{3}\left(\frac{3}{2} + \left|1 - \frac{5}{2}\right|\right) =$ ....

12) Plantear, mediante una ecuación o inecuación, las siguientes proposiciones y hallar la solución:

1) La distancia de ciertos números a cero es igual a 7 unidades, ¿Cuáles son esos números?

2) La distancia de ciertos números naturales a cero es menor que 5 unidades, ¿Cuáles son esos números? ¿Y si los números son reales?

3) Ciertos números reales tienen una distancia mayor o igual a 6 unidades con respecto al cero. ¿de qué números se trata?

4) Los valores de x cuya distancia a la raíz cuadrada del menor número par positivo es superior a $3\sqrt{2}$ unidades.

5) Los números reales cuya distancia al mayor múltiplo positivo de 4 de un solo dígito, es a lo sumo 5/2.

6) ¿Cuáles son los números ubicados a una distancia mayor o igual a 5 unidades del mayor número par negativo?

7) Los números reales cuya distancia al menor número entero positivo, es superior a 4.

8) Los $x \in \mathbb{R}$ que distan 6 unidades de 2.

13) Resuelvan las siguientes ecuaciones con módulo:

a) $|x| = 2$
b) $|x| = 16$
c) $|5x| = 10$
d) $|-2x + 3| = 7$
e) $(9x + 3)^2 = 25$
f) $\left|x - \frac{1}{3}\right| = 4$
g) $|3x - 4| = 23$
h) $|2x + 1| + 3 = 6$
i) $3 = \sqrt{(2x - 10)^2}$
j) $\left|\frac{2}{3}x + 4\right| - 5 = 2$
k) $|x - 4| + 3 = 5$
l) $|3x - 1| - 2 = \frac{1}{2}$
m) $|8x + 16| - |4x + 8| = 8$
n) $|2(x - 3)| = |x - 3|$
o) $|-3x| + |-x| = 4$
p) $|-8|.|-x| = |4(-4)|$
q) $|x + 1| + |2 + 2x| = 6$
r) $\frac{|1-x|}{|2|.|-1|} - \left|\frac{2-2x}{-8}\right| = 1$
s) $3x^2 = x^2 + 18$

14) Resuelvan las siguientes inecuaciones con módulo, expresando y graficando el conjunto solución:

a) $|x| < 3$
b) $|x + 5| \leq 10$
c) $|3x - 2| \leq 8$
d) $|2(x - 1) + 4| < 8$
e) $|x| \leq 5$
f) $|x - 6| < 15$
g) $|2 + 3(x - 1)| < 20$
h) $|x| \geq 3$
i) $|x - 4| > 5$
j) $|2x - 3| > 5$
k) $\left|3 - \frac{2}{3}x\right| \geq 5$
l) $|x| + 8 > 5$
m) $|-2x + 6| > 2$
n) $|-5x - 2| > 13$
o) $|6x + 6| - |5x + 5| < 2$
p) $2|x - 9| \geq |x - 9|$
q) $-|x - 3| + |2x - 6| < 4$
r) $|2x + 4| < 2 + |x + 2|$
s) $|-x|.|-3||2 + 4| > |-x| + |x|.|-4|^2 + 6$

15) Dados los siguientes intervalos, hallar el conjunto resultante de cada operación:

$$A = [-2; 2) \qquad B = (0; 5) \qquad C = (-\infty; 1) \qquad D = [-2; \infty)$$

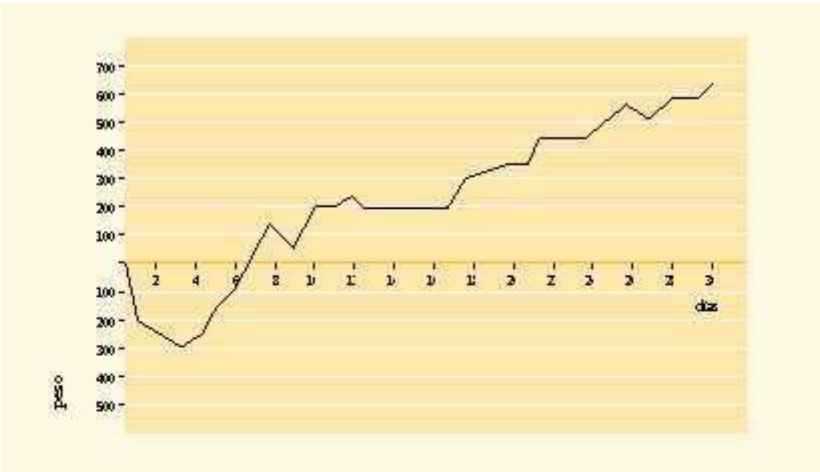
$a)\ A \cup B =$
$b)\ C \cap B =$
$c)\ A \cap \emptyset =$
$d)\ B - A =$
$e)\ \overline{C} =$
$f)\ \overline{D} =$
$g)\ A - C =$
$h)\ (A - C) - D =$
$i)\ C \cup D =$
$j)\ \overline{D} \cap \overline{C} =$
$k)\ (\overline{C} \cap A) - B =$
$l)\ \overline{C} \cap (A - B) =$

PRPORCIONALIDAD - PORCENTAJE

1. En un instituto de estudios se instaló una máquina que expende botellas de bebidas refrescantes. Durante un día, la empresa dueña de la máquina hizo un estudio sobre la venta de las bebidas entre las ocho de la mañana y las ocho de la tarde. Este estudio quedó registrado en el gráfico siguiente:

Responder las siguientes preguntas: ¿Cuantas botellas de bebida había a las 8 de la mañana? ¿En qué períodos no se ha retirado ninguna botella? entre las 11:00 y las 11:30 horas hay recreo, ¿cuántas botellas se retiraron en ese período?
¿A qué hora se volvió a llenar la máquina?
¿Cuándo se han consumido más bebidas por hora: en el recreo o durante el almuerzo?
¿A qué hora se supone terminan las clases en ese instituto?

2. El gráfico siguiente indica las variaciones de peso de una guagua, durante los primeros treinta días de su vida. Peso al nacer: 3,500 kg.



Respondan las preguntas que siguen:
¿Cuál es el peso de la guagua a los 8 días?
¿En qué días el peso es el más bajo?
¿En qué días el peso ha permanecido invariable?
¿En qué días el peso ha bajado?

3. Determina cuáles de las siguientes relaciones son de proporcionalidad directa:

a. Nº de horas de trabajo de un pintor y nº de metros de valla que pinta.
b. Cantidad de jamón que se compra y precio que se paga.
c. Un aire limpio contiene un 21% de oxígeno. En cada inspiración que realizamos la tercera parte de éste pasa a la sangre. ¿Son directamente proporcionales la cantidad de oxígeno que pasa a la sangre y el número de inspiraciones?
d. Altura de un poste y longitud de la sombra que produce a una hora determinada del día.
e. Peso de una persona y superficie que abarca su sombra.
f. Nº de hojas de una novela y tiempo que se tarda en leerla.

4. Indica si hay proporcionalidad directa, inversa o si no hay ninguna proporcionalidad:

a. Cantidad de personas que viajan en un autobús y dinero recaudado.
b. Cantidad de personas que viajan en un autobús y ganancias netas de la empresa.
c. Número de horas que está encendida una máquina de refrescos y dinero que recauda.
d. Cantidad de refrescos que cabe en una caja y diámetro de las botellas.

e. Número de litros que escapan por segundo en el desagüe de una piscina y diámetro del desagüe.
f. Número de vueltas que da una rueda para recorrer una distancia y diámetro de la rueda.
g. Número de comensales para comerse una tarta y cantidad que corresponde a cada uno.
h. Tiempo que tarda un balón en caer al suelo y altura desde la que se lanza.
i. Número de horas que está encendida una bombilla y gasto que ocasiona.
j. Número de peldaños de una escalera de altura fija y anchura de ellos.

5. Completa las tablas:

Velocidad del vehículo	60	75	
Revoluciones por minuto	2400		5050

6. Sabiendo que en cada inspiración introducimos 2 litros de aire aproximadamente, y que inspiramos unas 15 veces por minuto:

Cantidad de oxígeno procesada (en litros)	2.1		1103760
Tiempo computado de respiración (en minutos)	1	60	

7. Analiza si las siguientes tablas son de proporcionalidad:

Magnitud A	2	7	3
Magnitud B	3	10,5	2000

Magnitud A	-3	4	-7
Magnitud B	6	-8	14

Magnitud A	4	12	100
Magnitud B	3	9	75

8. Tres amigas organizan una microempresa. Deciden instalarse con una panadería y vender, entre otros productos, pan integral. La experiencia casera les indica que un kilogramo de harina les rinde 1,250 kg de pan. Además, por cada kg de harina, necesitan 40 g de levadura y 50 g de manteca vegetal. Para cada día de la primera semana, ellas piensan hacer 30 kg de pan. ¿Cuánta harina integral, levadura y manteca necesitan para hacer el pan de la semana

9. En un grupo de personas hay 5 hombres por cada tres mujeres. Si hay 120 mujeres, ¿cuántos hombres hay?

10. El charrán del ártico es una de las aves que hace la migración más larga, ya que recorre 20169 Km en 12 días. ¿Cuánto recorrerá en 5 días si lleva siempre la misma velocidad?

11. Un administrativo realiza 1470 pulsaciones de teclado en 7 minutos. ¿Cuántas veces le da a la tecla en 100 seg?

12. Para hacer una tarta de 6 raciones se necesitan 3 huevos, 100 g de mantequilla , 120 g de chocolate y 60 g de levadura. ¿Qué cantidades se necesitarán para una de 8 raciones?

13. En 17 cajas iguales hay 1632 botones iguales, ¿cuántos habrá en 37? ¿Cuántas cajas se necesitarán para guardar 900 botones?

14. Eva compró siete bolígrafos iguales con 231 pesos. ¿Cuántos podría haber comprado si hubiese tenido 550 pesos?

15. 8 albañiles tardan en hacer una obra 15 días y medio, ¿cuánto tardarían 11 albañiles?

16. Una persona tiene 30 vacas y alimento almacenado para darles de comer durante 16 días. Vende 18 de ellas, ¿Cuántos días puede alimentar a las que sobran con el alimento que tiene?

17. Un ganadero posee forraje para alimentar a sus bueyes durante 14 semanas. Tras vender 60 animales comprueba que le queda alimento para 20 semanas, ¿cuántos bueyes le quedaron?

18. Un ciclista que corre a una velocidad de 16 Km/h tarda 2 horas y 20 minutos en llegar al próximo pueblo. ¿Cuánto tardaría si llevase una velocidad de 22 Km/h?

19. Completa la siguiente tabla:

	10%	12,5%	20%	25%	$33\frac{1}{3}\%$	50%	75%
12							
		3					
					30		
							3
120							
			4,8				

20. Juan tiene que pagar $ 90.000. Si le rebajan el 5% de su deuda, ¿cuánto tiene que pagar todavía?

a) $ 450 b) $ 4.550 c) $ 85.500 d) $ 89.500 e) $ 94.550

21. Un metro de tela me cuesta $ 1.500. ¿A cómo tengo que venderlo para ganar el 20% de lo que costó?

a) $ 1.800 b) $ 1.200 c) $ 1.300 d) $ 1.000 e) $ 350

22. Pedro tenía $ 80.000. Si gastó el 20% y dio a su hermano el 15% del resto, ¿cuánto le queda?

a) $ 16.000 b) $ 28.000 c) $ 52.000 d) $ 54.400 e) $ 78.000

23. De los 125 alumnos de un colegio, el 36% son damas. ¿Cuántos son varones?

a) 89 b) 80 c) 45 d) 36 e) 25

24. Una camisa me costó $ 10.500, con lo que gasté el 25% de mi dinero. ¿Cuánto dinero tenía?

a) $ 2.625 b) $ 13.125 c) $ 32.525 d) $ 40.500 e) $ 42.000

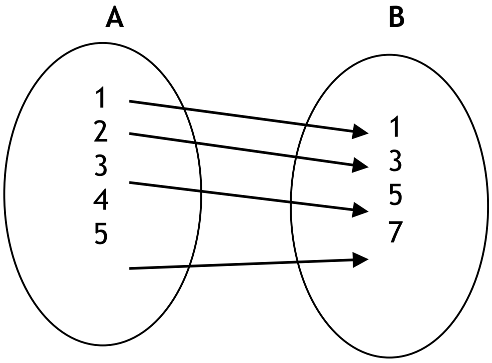
25. De las 240 fichas que tiene un niño, 48 son rojas. ¡Cuál es el porcentaje de fichas rojas?

a) 5% b) 10% c) 15% d) 20% e) 25%

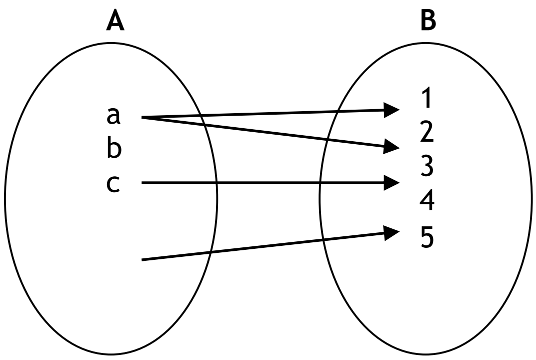
FUNCIONES

1) Indica cuáles de las siguientes relaciones $\mathbb{R} : A \to B$ son funciones y justificar.

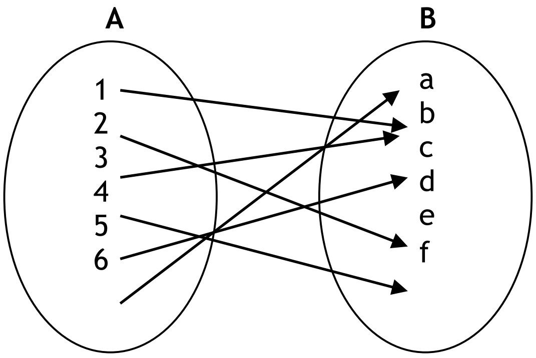
a)



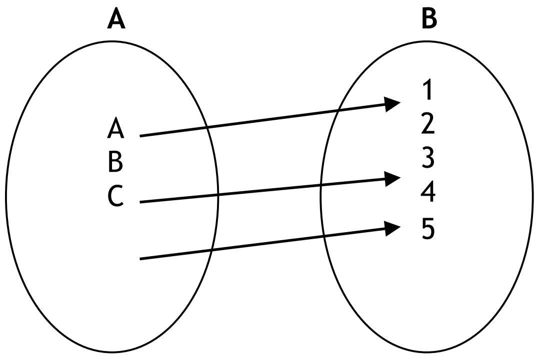
b)



c)

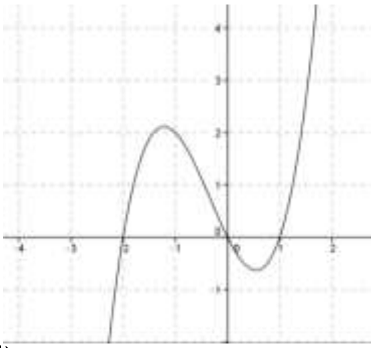


d)

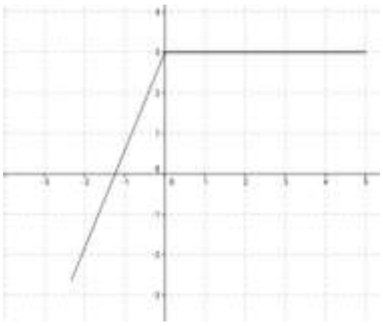


2) Analizar cuáles de las siguientes gráficas corresponden a funciones de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

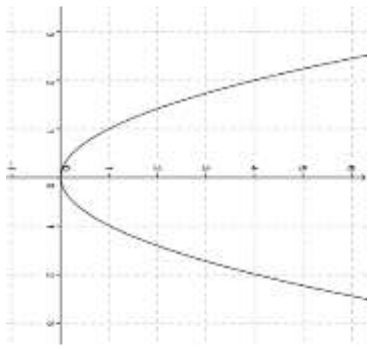
a)



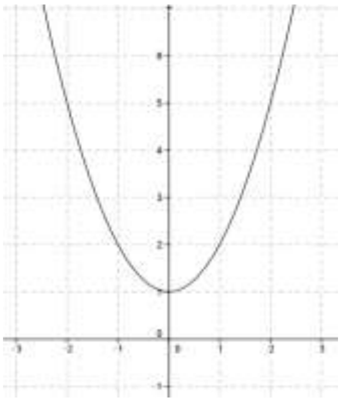
b)



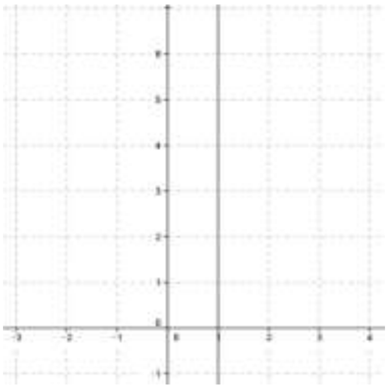
c)



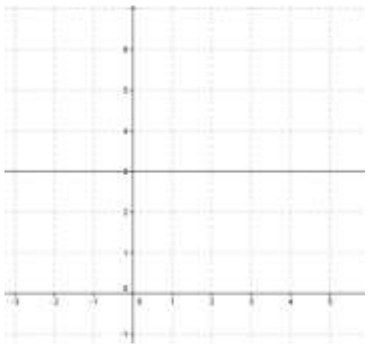
d)



e)



f)



3) Indica dominio e imagen de las funciones correspondientes al ejercicio 2.

4) Redefine el dominio y/o codominio de los ítems c) e i) del ejercicio 2, para que pasen a ser funciones.

5) Sea la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} / f(x) = 2x - 4$,

a) Hallar las imágenes de: $-2;\ 6{,}6;\ \frac{1}{4};\ 3^{-1};\ y\ 0$

b) Hallar las pre imágenes de: $-5;\ 0{,}8;\ 0;\ 15;\ y\ \left(\frac{4}{9}\right)^{-1/2}$

6) Sea la función $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} / g(x) = x^2$,

a) ¿Cuál es la imagen de 3? ¿Y de -4?
b) ¿Qué preimagen tiene 16? ¿Y 9? ¿Cuál es la preimagen de 0?
c) ¿Existe la preimagen de 12? ¿Por qué?

7) Calcular el dominio de las funciones racionales:

$I)\ f(x) = \dfrac{3}{x-4}$ $\quad II)\ g(x) = \dfrac{1}{5x-5}$ $\quad III)\ h(x) = \dfrac{9}{3x^2-21}$ $\quad IV)\ k(x) = \dfrac{8}{2x-0{,}5}$

8) Sea la función $h : A \to B / h(x) = \sqrt{x}$,

a) ¿Los reales negativos pertenecen al dominio de esta función? ¿Por qué?
b) ¿Cuál es la imagen de h(x)?
c) Indicar analíticamente el dominio de las funciones. Graficarlas e indicar su imagen.

$I)\ f(x) = \sqrt{-3-x}$ $\quad II)\ h(x) = \sqrt{3x+15}$ $\quad III)\ k(x) = \sqrt{8-2x}$

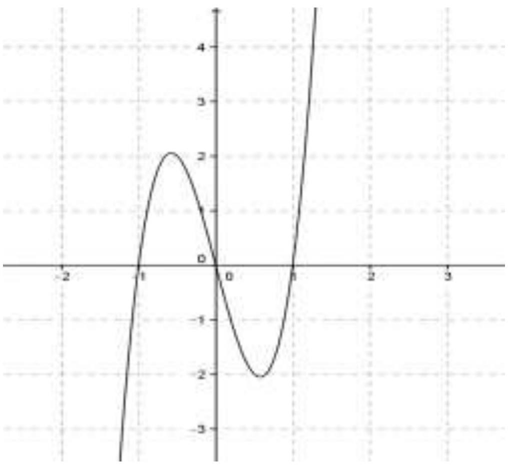
9) Graficar la función que a cada número entero le hace corresponder su cuadrado disminuido en cuatro unidades y luego la función que a cada número real le hace corresponder su cuadrado disminuido en cuatro unidades. ¿Qué diferencia hay entre los gráficos? ¿El punto $(\sqrt{2}; 2)$ pertenece a ambos gráficos?

10) Representar gráficamente las siguientes funciones, en ejes cartesianos distintos cada inciso y analizar completamente:

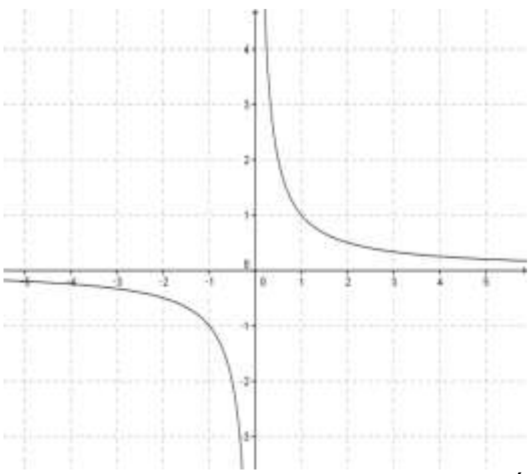
$a)\ h(x) = \begin{cases} x-2 & si\ \ x \le 0 \\ -x-2 & si\ \ 0 < x < 3 \\ 4-3x & si\ \ x \ge 3 \end{cases}$ $\quad b)\ g(x) = \begin{cases} 5 & si\ \ x \le -3 \\ x^2-4 & si\ \ -3 < x < 3 \\ 2x-1 & si\ \ x \ge 3 \end{cases}$ $\quad c)\ f(x) = \begin{cases} (x-2)^2 & si\ \ x \le 3 \\ x-4 & si\ x > 3 \end{cases}$

11) Dadas las siguientes gráficas funcionales, determinar el conjunto de ceros, de positividad y negatividad, intervalos de crecimiento y decrecimiento, de cada una:

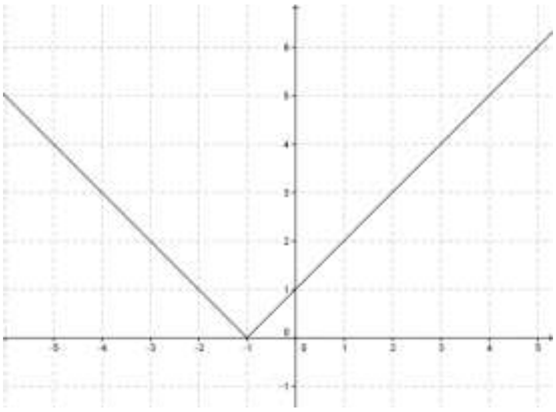
a)



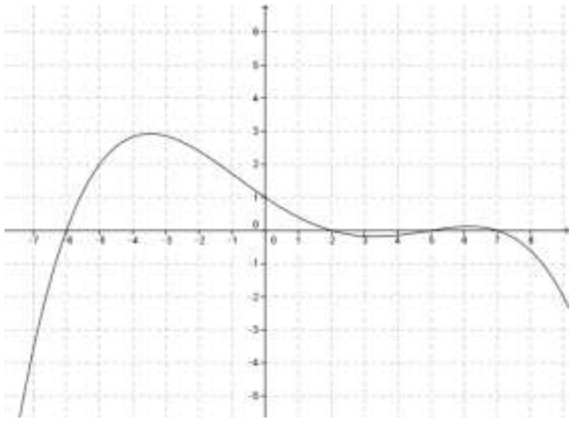
b)



c)



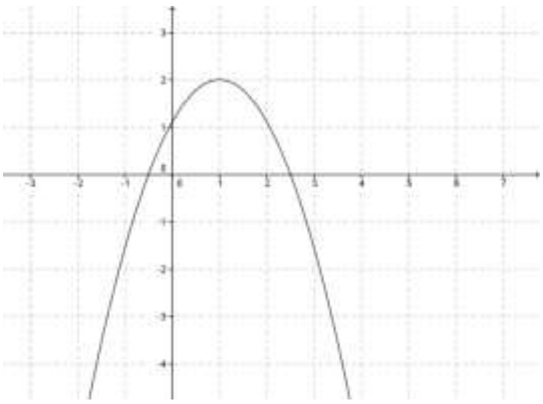
d)



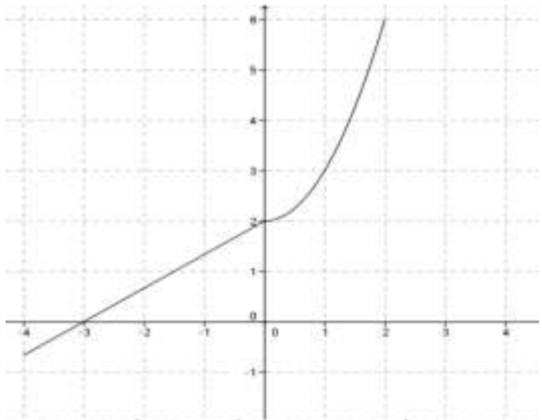
12) Dadas las gráficas de las siguientes funciones $f: A \to \mathbb{R}$

a) Indicar dominio e imagen.
b) Conjuntos de ceros, positividad y negatividad.
c) Intervalos de crecimiento y decrecimiento.
d) Analiza la biyectividad.
e) Según el análisis, redefine dominio y/o codominio para que resulten biyectivas.

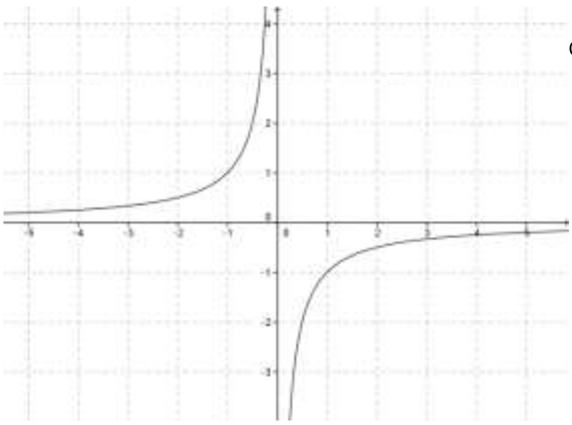
a)



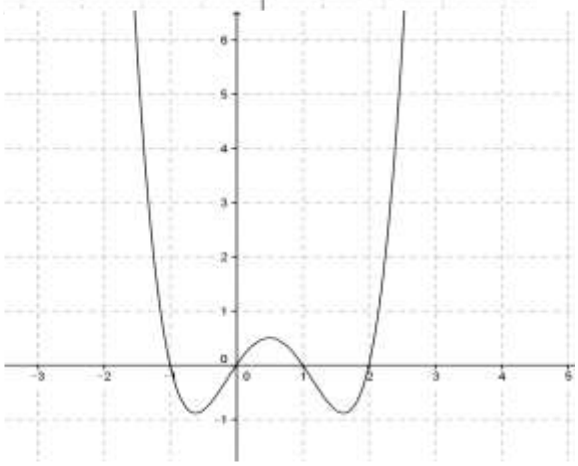
b)



c)



d)



13) Dadas las siguientes funciones, determinar si son inyectivas (I), suryectivas (S) , biyectivas (B) o ninguna (N).

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} / f(x) = -3x + 1$
b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} / f(x) = |x|$
c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} / f(x) = x^2$
d) $f : \mathbb{R} \to [0; \infty) / f(x) = |x|$
e) $f : \mathbb{R} \to \{2\} / f(x) = 2$
f) $f : (-\infty; 0] \to \mathbb{R} / f(x) = x^2$

14) Sea el conjunto $A = \{1,2\}$ y el conjunto $B = \{a, b, c\}$

a) ¿Puedes establecer una función inyectiva $f : A \to B$? ¿Cuántas funciones inyectivas puedes definir?
b) ¿Puedes establecer una función suryectiva $f : A \to B$? ¿Por qué?
c) ¿Puedes establecer una biyección? ¿Por qué?

15) Sea la función $f : A \to \mathbb{R} / f(x) = x^2 + 2$

Indicar para cuales de los siguientes conjuntos A, f es una función inyectiva. Justificar la respuesta.

a) $A = [-2; 2]$
b) $A = \mathbb{R}$
c) $A = [0; \infty)$
d) $A = [-4; -1]$
e) $A = \mathbb{R}^+$

16) Sea la función $f : \mathbb{R} \to B / f(x) = x^2 + 2$

Indicar para cuales de los siguientes conjuntos B, f es una función suryectiva. Justificar la respuesta.

a) $B = (2; \infty)$
b) $B = \mathbb{R}$
c) $B = \mathbb{R}^+$
d) $B = \mathbb{R}^- \cup \{0\}$
e) $B = [2; \infty)$

FUNCION CUADRATICA I

1) Graficar y analizar completamente las siguientes funciones:

$a)\ f(x) = -x^2 + 12x - 36$ $\quad d)\ f(x) = -x^2 + 3x$ $\quad g)\ f(x) = 2x^2 + 4x - \frac{5}{2}$ $\quad j)\ f(x) = -\frac{1}{4}x^2$

$b)\ f(x) = 5x^2 - 10x + 1$ $\quad e)\ f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}$ $\quad h)\ f(x) = x^2 - 4x + 4$ $\quad k)\ f(x) = x^2 - 5x + 8$

$c)\ f(x) = 4x^2 - 1$ $\quad f)\ f(x) = x^2 + x + 1$ $\quad i)\ f(x) = -x^2 + 4x$ $\quad l)\ f(x) = -x^2 + 2x + 3$

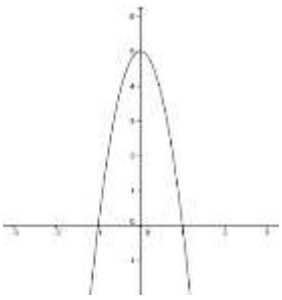
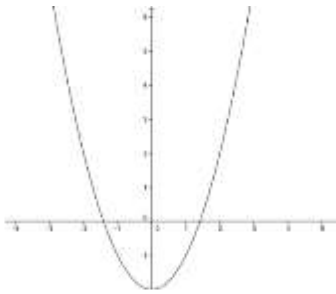
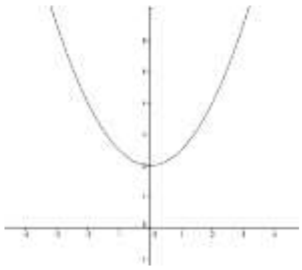
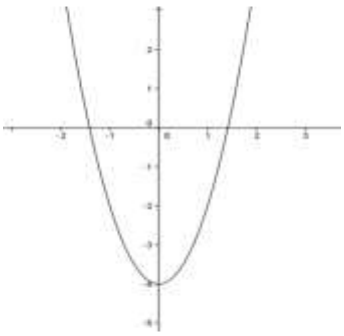
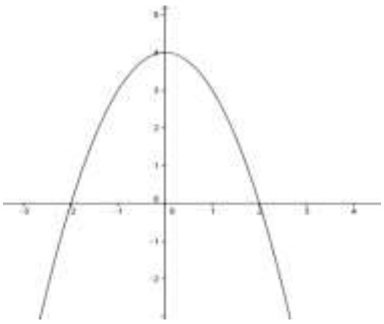
2) Dada la función $f:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,/\, f(x) = 3x^2 + 1$

a) Calcular $f(-3),\ f(\sqrt{6})\ y\ f(4^{-1})$

b) Indicar, de ser posible, los valores de x para los cuales se verifique: $f(x) = 0,\ f(x) = 48,\ f(x) = -2\ \ y\ \ f(x) = f(2)$

3) Relacionar cada gráfico con la fórmula correspondiente.

$a)\ y = \frac{1}{2}x^2 + 2$ $\quad b)\ y = 2x^2 - 4$ $\quad c)\ y = -x^2 + 4$ $\quad d)\ y = -5x^2 + 5$ $\quad e)\ y = x^2 - 2$

4) Encuentra analíticamente:

a) El valor de ***b*** para que la función $f(x) = -\frac{1}{3}x^2 + bx - 4$ pase por el punto $Q = (3;5)$

b) Los valores de ***b*** y ***c*** para los cuales los puntos (1; 0) y (-1; 6) pertenezcan a la gráfica de $f(x) = x^2 - bx + c$

c) El valor de ***b*** para que la parábola $y = x^2 + bx + 3$ tenga el vértice en el punto (2; -1)

d) Determinar el valor de ***a*** para que la función $y = ax^2 + 2x - 3$ tenga la abscisa del vértice igual a 2.

5) Un grupo de biólogos estudia las características de un lago artificial en el cual introdujeron un conjunto de peces para analizar su evolución. En un principio, la colonia crece reproduciéndose normalmente, pero al cabo de unos meses algunos peces mueren, a causa del hacinamiento. Los registros indican que el conjunto de peces evoluciona según la ley $n(x) = 240 + 10x - 0{,}1x^2$, donde ***x*** representa los días que han transcurrido y ***n*** la cantidad de peces. Con esta proyección pronto se extinguirán.

Sobre la base de la función dada por ese científico, responder:

a) ¿Cuántos peces introdujeron en el lago?

b) ¿Durante cuánto tiempo la cantidad de peces fue aumentando?

c) ¿Cuál fue la cantidad máxima de peces que hubo en el lago? ¿En qué momento se produjo tal situación?

d) ¿Luego de cuánto tiempo se extinguiría la población?

6) Completar las siguientes proposiciones respecto de la gráfica de $f(x)=ax^2 + bx + c$; escribiendo las condiciones sobre los coeficientes a, b y c.

a) El vértice es un mínimo, entonces..

b) El eje de simetría es x = 0; luego..

c) Interseca al eje “y” en 3, luego...

d) El vértice es el punto (0,0); luego...

e) Corta al eje “x” en dos puntos, luego...

f) No tiene su vértice sobre el eje “y”; luego...

7) Resolver las siguientes ecuaciones:

$a)\ \dfrac{x+3}{3} = \dfrac{4}{4-x}$ $\qquad b)\ (x+6)(x-6) = 133$ $\qquad c)\ 3(x^2-1) - 2(x^2+2) = 18$

$d)\ \dfrac{10x^2-2x}{3x+1} = 3x-1$ $\qquad e)\ 2x^2 + 2 = 0$ $\qquad f)\ 2x^2 = 12x$

$g)\ 18x(0{,}25x-5) = 0$ $\qquad h)\ 5(1-x)^2 = -10(x+1)$ $\qquad i)\ (x-2)^2 + (x-3)^2 = 181$

FUNCION CUADRATICA II

1) Hallar las coordenadas del vértice de las siguientes funciones cuadráticas y escribe luego su forma canónica.

$a)\ f(x) = -2x^2 + 4x - 6$ $\quad b)\ f(x) = -x^2 + 5x$ $\quad c)\ f(x) = 4x^2 - 9$

$d)\ f(x) = -\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + 2$ $\quad e)\ f(x) = -2(x+1)(x-3)$ $\quad f)\ f(x) = \frac{1}{4}(x+1)^2 - 3$

2) Indicar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, justificando en cada caso.

a) El punto $P = (-1; 1)$ pertenece a la gráfica de la función $f(x) = -x^2$

b) El vértice de la función cuadrática $f(x) = \frac{2}{5}(x-3)^2 - 2$ es el punto $(3;\ -2)$

c) La forma factorizada de la función cuadrática $f(x) = 3x^2 - 4x + 1$ está dada por $f(x) = (x-1)(x-\frac{1}{3})$

3) De las siguientes funciones expresadas en forma factorizada:

a) Indicar las raíces

b) Obtener su forma polinómica.

$f_1(x) = (x-2)(x+4)$ $\quad f_2(x) = 2(x-1)(x-3)$ $\quad f_3(x) = (x+5)^2$ $\quad f_4(x) = x(x-3)$

4) De las siguientes funciones expresadas en forma canónica:

a) Indicar el vértice de cada función

b) Hacer el pasaje a forma polinómica.

$f_1(x) = (x+2)^2 - 16$ $\quad f_2(x) = 2(x-3)^2 - 2$ $\quad f_3(x) = 4\left(x + \frac{1}{2}\right)^2$

5) Completar la tabla.

Forma polinómica	*Forma factorizada*	*Forma canónica*
$f(x) = \frac{1}{2}x^2 + x - 12$		
	$g(x) = 3(x-2)(x-1)$	
		$h(x) = 3(x+2)^2 - 3$
		$k(x) = (x+1)^2$

6) a) Escribir la forma factorizada de la función $y = 2(x-1)^2 - 8$ sin hallar previamente la forma polinómica.
b) Escribir la forma polinómica de la función hallada en el inciso anterior.

7) Hallar la forma canónica de la función cuyas raíces son: $x_1 = -4$ y $x_2 = 0$, cuya gráfica pasa por el punto (2; -6).

8) Determinar la ecuación de la función cuadrática empleando la forma más conveniente, en cada caso.

a) El coeficiente cuadrático es -2 y el vértice es (-3; 4)

b) El coeficiente cuadrático es 2, corta al eje de ordenadas en 9 y pasa por el punto (-1; 3)

c) El vértice es $V = (2; 3)$ y pasa por el punto (4; -7)

d) El coeficiente cuadrático es -1, el eje de simetría es x = 2 y la ordenada al origen es 5.

e) Las raíces son -4 y 6; y a = -1/3.

f) Tiene por vértice de su parábola asociada $V = (-1; 5)$ y una de sus raíces es x = 4

g) $|a| = 3,\ C^- = (-\infty; -4) \cup (1; \infty)\ \ y\ \ C^+ = (-4; 1)$

9) Indicar el tipo de raíces de las funciones, utilizando el discriminante.

$a)\ y = x^2 + 13x + 12$ $\qquad$ $b)\ y = x(x+2) - 5$ $\qquad$ $c)\ f(x) = (2x-3)^2$

10) Hallar, si existe, $k \in \mathbb{R}$ para que se cumpla la condición solicitada en cada caso:

a) La función $f(x) = -x^2 + x - k$ tiene una raíz doble.

b) La ecuación $3x^2 + k = 0$ no tiene solución en $\mathbb{R}$.

c) El gráfico de la función $g(x) = -kx^2 + 1$ interseca al eje de las abscisas en dos puntos.

d) El gráfico de las funciones de la forma $f(x) = -x^2 - kx - 5$ tiene contacto con el eje x, pero no lo atraviesa.

11) Los registros de temperatura tomados entre las 0 hs y las 24 hs en una zona rural se ajustan a la función: $T(x) = -\frac{1}{10}(x-12)^2 + 10$ (Donde T = temperatura en ℃ y x = hora del día). Responder:

a) ¿Cuál fue la máxima temperatura?

b) ¿A qué hora se registró?

c) ¿Cuándo la temperatura fue de 0℃?

d) ¿Qué temperatura había a las tres de la tarde?

12) Al poner a prueba un nuevo automóvil se comprobó que para velocidades mayores que 10 km/h y menores que 150 km/h, el rendimiento de combustible ***r*** (en km/litro) está relacionado con la velocidad ***v*** (en km/h) mediante la función $r(v) = 0{,}002v.(180 - v)$.

Determinar a qué velocidad el rendimiento es máximo y calcular dicho rendimiento.

13) Determinar analítica y gráficamente la solución de los sistemas cuadráticos mixtos:

$a)\ \begin{cases} y = x^2 \\ y = x + 2 \end{cases}$ $\quad$ $b)\ \begin{cases} y = x^2 + 4 \\ y = -5x + 4 \end{cases}$ $\quad$ $c)\ \begin{cases} y = x^2 - 2x + 1 \\ 2x + y = 2 \end{cases}$ $\quad$ $d)\ \begin{cases} y + 4x^2 = 1 \\ y = \frac{1}{4}x^2 + 1 \end{cases}$ $\quad$ $e)\ \begin{cases} y = 2x^2 + 4x - 6 \\ 2y = 4x^2 - 16x + 16 \end{cases}$

POLINOMIOS FACTORIZACION

1) Hallen la raíz en los siguientes polinomios de grado uno

a) $A(x) = x - 2$
b) $B(x) = 3x - 2$
c) $C(x) = -2x + 3$
d) $D(x) = 5x - \sqrt{2}$
e) $E(x) = -\frac{1}{3}x - 2$
f) $F(x) = -2x + \sqrt{3}$

2) Hallen las raíces en los siguientes polinomios de grado dos, siempre que sea posible

a) $A(x) = 2x^2 + 2x - 40$
b) $B(x) = 3x^2 + 3x - 60$
c) $C(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x - 14$
d) $D(x) = 10 + 3x - x^2$
e) $E(x) = -4x + x^2$
f) $F(x) = -2x^2 - 2x + 4$

3) Hallen las raíces reales en los siguientes polinomios de la forma $P(x) = ax^n + b$

a) $A(x) = x^3 - 8$
b) $B(x) = 2x^3 + 16$
c) $C(x) = x^4 - 64$
d) $D(x) = 3x^3 - 81$
e) $E(x) = -x^5 + 32$
f) $F(x) = 2x^6 - 2$
g) $G(x) = 4x^4 - 16$
h) $H(x) = x^7 - 128$

4) Dados los siguientes polinomios escritos en forma factorizada, determinen el coeficiente principal, el grado y las raíces y su multiplicidad. En caso de que no sean reales, indiquen cuántas son

a. $A(x) = 3\left(x - \frac{1}{2}\right)(x - 2)$
b. $B(x) = -2(x - 5)$
c. $C(x) = -7\left(x - \frac{1}{4}\right)\left(x - \sqrt{3}\right)^2(x^2 + 2)$
d. $D(x) = \frac{1}{2}(x - 2)(x + 1)^4$
e. $E(x) = \sqrt{3}\left(x - \frac{5}{3}\right)(x + 3)^3(x + \sqrt{2})^2$
f. $F(x) = 2x^2\left(x - \frac{4}{7}\right)(x + 2)^4(x + \sqrt{3})^2(x^2 + 6)$
g. $G(x) = -5x^3(x + 2)(x - 5)(x^2 + 3)(x - \sqrt{2})$

5) Escriban un polinomio que cumpla con las características que se piden en cada caso:

a) Que tenga grado seis, coeficiente principal negativo y sus únicas raíces sean $x_1= -3$; $x_2=\frac{1}{3}$ y $x_3=0$
b) Que tenga dos raíces no reales y grado cinco

c) Cuyo grado sea cuatro y que tenga dos raíces irracionales, dos enteras y una negativa
d) Que no tenga raíces reales

6) Encuentren las raíces en estos polinomios y exprésenlos en forma factorizada

a) $A(x) = -2x + 3$
b) $B(x) = 5x - \sqrt{2}$
c) $C(x) = -\frac{1}{3}x - 2$
d) $D(x) = -2x + \sqrt{3}$
e) $E(x) = 2x^2 + 4x - 6$
f) $F(x) = 7x^2 + 6 + 17x$
g) $G(x) = 10 + 3x - x^2$
h) $H(x) = -4x + x^2$
i) $I(x) = -2x^2 - 2x + 4$

7) Factorear los siguientes polinomios aplicando el Teorema de Gauss

$a)\ A(x) = x^3 - x - 2 + 2x^2$
$b)\ B(x) = x^4 - 3x^2 - 2x$
$c)\ C(x) = -2x^3 - 8x - x^2 - 4$
$d)\ D(x) = x^3 - 5x^2 + 8x - 4$
$e)\ E(x) = x^3 - 4x^2 - 7x + 10$
$f)\ F(x) = x^5 + 8x^4 - 3x^3 - 24x^2$
$g)\ G(x) = 2x^3 - 6x^2 - 18x + 54$
$h)\ H(x) = -2x^3 + 2x^2 + 18x - 18$
$i)\ I(x) = 2x^3 - 9x^2 + 10x - 3$
$j)\ J(x) = 4x^3 - 11x^2 + 10x - 3$

8) Encontrar el valor de ***a* y *b*** para se cumplan las siguientes condiciones:

$a)\ P(x) = ax^3 - 2bx^2 - 3x - 1\ sea\ divisible\ por\ (x-1)\ y\ (x+2)$

$b)\ P(x) = (a+1)x^2 + 2bx^3 - 5\ tenga\ resto\ = -2\ si\ se\ divide\ por\ (x-3)$
$y\ resto = 5\ si\ se\ divide\ por\ (x+5)$

$c)\ P(x) = (a+2)x^3 - (2b+1)x^2 - 3ax - 4b\ sea\ divisible\ por\ (x-2)\ y\ resto = 4$
$si\ lo\ divide\ por\ (x+1)$

9) Hallar el valor de k:
a) $(x^4 - 5x + k) : (x-1)\ con\ resto = 0$
b) $\left(x^3 - \frac{1}{3}x^2 - 2x + k\right) : (x+3)\ con\ resto = -16$
c) $(x^3 - x^2 + kx - 10)\ si\ 2\ es\ raíz$

10) Encontrar el polinomio P(x) que cumpla las condiciones pedidas:
a) Tenga grado 4, sus raíces son 1,-1,2 y -3; y P(-2) = 5
b) Tenga grado 3, una raíz doble en 3, una simple en 2 y el término independiente sea 6.
c) Tenga grado 4, una raíz simple en 0 y -1, una raíz doble en -5 y P(4) = 5.
d) Tenga grado 3, el C.P. sea primo menor que 3, el T.I. sea 5 y P(1) = 11 y P(-1) = 1
e) Un polinomio de grado 2 con las mismas raíces que $P(x) = 2x^2 - 3x - 2$

11) Completar para que la proposición sea verdadera.

$a)\ P(-1) = 0 \Rightarrow P(x)\ es\ divible\ por$ ____________
$b)\ P(x)\ es\ divisible\ por\ (x+3)\ \Rightarrow P(-3) =$ _____
$c)\ P(2) = 0 \Rightarrow P(x)\ es\ múltiplo\ de$ ______________
$d)\ 4\ es\ raíz\ de\ P(x) \Rightarrow\ P(x)\ es\ divisible\ por$___________

12) Extraigan factor común en los siguientes polinomios

a) $A(x) = 3x^2 + 6x$
b) $B(x) = 4x^4 + 2x^3 + 8x^5$
c) $C(w) = 9w^4 + 3w^3 - 18w$
d) $D(x) = -2x^3 + 5x^2$
e) $E(x) = 3x + 2$
f) $F(x) = -2x + 3$
g) $G(x) = -3x^2 - 9x$
h) $H(x) = 6x^4 - 5x^3 + 7x^2$
i) $I(x) = -6x + 12x^2 + 8x^4$
j) $J(x) = -10x^2 - 20$

13) Extraigan factor común y apliquen posteriormente otra estrategia para factorizar los siguientes polinomios

a) $A(x) = 3x^2 - 12x$
b) $B(x) = 2x^3 + 3x^2$
c) $C(x) = 6x^4 + 5x^3$
d) $D(x) = 5x^3 + 5x^2 - 30x$
e) $E(x) = 2x^4 - 8x^3 - 10x^2$
f) $F(x) = 6x^6 + 30x^5 - 84x^4$
g) $G(x) = -2x^3 + 10x^2 + 48x$
h) $H(x) = 7x^5 + 5x^4 + x^3$
i) $I(x) = 2x^4 - 6x^3 + 4x^2$
j) $J(x) = -4x^7 - 8x^3 + 4x^2 + 16x$

14) Factorear aplicando diferencia de cuadrados
a) $A(x) = x^2 - 4$
b) $B(x) = x^2 - 16$
c) $C(x) = x^2 - 36$
d) $D(x) = x^4 - 16$
e) $E(x) = x^4 - 64$
f) $F(x) = x^4 - 81$
g) $G(x) = x^8 - 16$

15) Completen para que se verifiquen las siguientes igualdades

a) $(x + 11)\,.\,(\quad - \quad) = x^2 - 121$
b) $(\quad + \quad)\,.\,(x^2 - 3x^2) = x^4 - 9x^6$
c) $(8x + \quad)\,.\,(\quad - \quad) = 64x^2 - 100$
d) $(\quad + \quad)\,.\,(\quad - \quad) = x^8 - \frac{1}{4}$
e) $(x + 3).(\quad - \quad) = x^2 - 9$
f) $(\quad + \quad).(\quad - \quad) = x^6 - 25x^4$

16) Factorizar por completo los siguientes polinomios, partiendo de la técnica de factor común

a) $A(x) = 3x^4 - 48x^2$
b) $B(x) = -3x^5 + 243x^3$
c) $C(x) = -6x^4 + 486$
d) $D(x) = 5x^7 - 125x^5$
e) $E(x) = 3x^7 - 12x^5$
f) $F(x) = 2x^5 - 32x$
g) $G(x) = -x^3 + 16x$

17) Apliquen factor común por grupos para comenzar a factorizar los siguientes polinomios

a) $A(x) = x^3 - x^2 + x - 1$
b) $B(x) = 2x^3 - 6x^2 + x - 3$
c) $C(x) = 3x^5 + x^4 - 3x - 1$
d) $D(x) = 4x^3 + 8x^2 + 8x + 16$
e) $E(x) = x^6 - 9x^4 - 256x^2 + 2304$
f) $F(x) = 2x^6 - 2x^4 - 2x^2 + 2$
g) $G(x) = x^8 + x^6 - 64x^2 - 64$
h) $H(x) = x^{10} - x^6 - x^4 + 1$
i) $I(x) = x^6 + x^5 - 2x^4 + x^2 + x - 2$
j) $J(x) = -2x^8 + 12x^7 - 18x^6 + 2x^2 - 12x + 18$

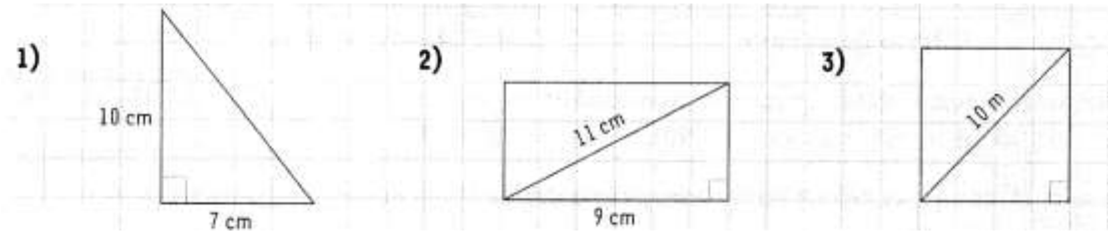
18) Factorizar aplicando todas las técnicas estudiadas hasta el momento

a) $A(x) = x^4 - 2x^3 + x^2$
b) $B(x) = x^5 - x^3 - x^2 + 1$
c) $C(x) = 20x^2 - 20x + 5$
d) $D(x) = 5x^3 - 5x$
e) $P(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x - 14$
f) $Q(x) = x^3 + 5x^2 - 9x - 45$
g) $S(x) = \frac{1}{2}x^5 - 4x^4 + 8x^3$
h) $H(x) = 81x^7 - x^5$

19) $H(x) = x^4 - 8x^2 - 9$ sabiendo que x=3 es una de sus raíces
$(No\ olviden\ completar\ el\ polinomio\ para\ aplicar\ la\ regla\ de\ Ruffini)$

TRIGONOMETRIA

1) Hallar el valor del lado desconocido en cada una de las siguientes figuras.



2) Hallar la razón trigonométrica y, con la calculadora, el ángulo correspondiente.

a) $\sin \varepsilon =$ $\Rightarrow \varepsilon \cong$

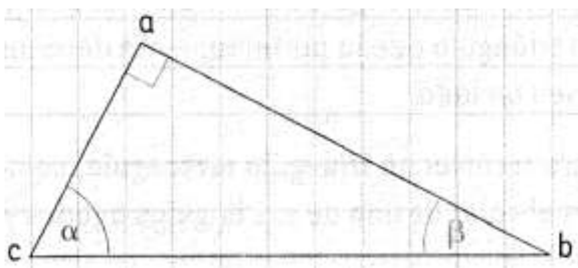
b) $\cos \varepsilon =$ $\Rightarrow \varepsilon \cong$

c) $\sin \delta =$ $\Rightarrow \delta \cong$

d) $\cos \delta =$ $\Rightarrow \delta \cong$

3) Calcular los valores de ***x*** e ***y*** en cada una de las siguientes figuras.

4) Escribir las razones trigonométricas correspondientes al siguiente triángulo rectángulo.



a) $\sin \alpha =$

b) $\cos \alpha =$

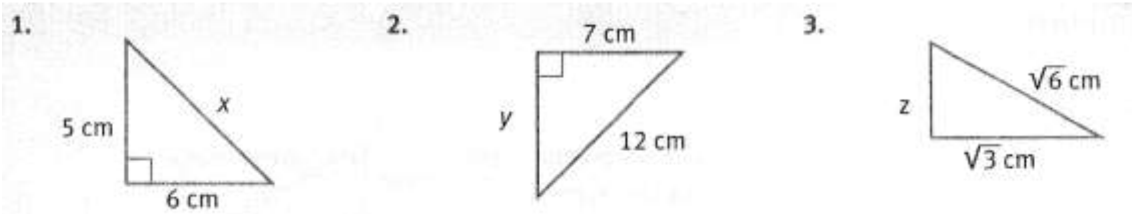
c) $\tan \alpha =$

d) $\sin \beta =$

e) $\cos \beta =$

f) $\tan \beta =$

5) Hallar el valor del lado desconocido aplicando el Teorema de Pitágoras.



6) Escribir la expresión trigonométrica correspondiente.

a) $\sin\alpha =$

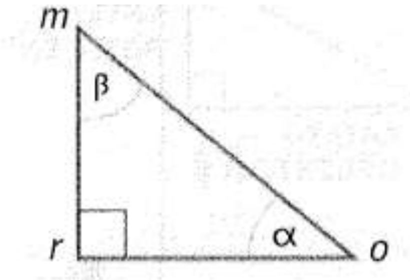
b) $\cos\alpha =$

c) $\tan\alpha =$

d) $\sin\beta =$

e) $\cos\beta =$

f) $\tan\beta =$



7) Hallar la razón trigonométrica y, con la calculadora el ángulo correspondiente.

a) $\sin\varepsilon =$ $\Rightarrow \varepsilon \cong$

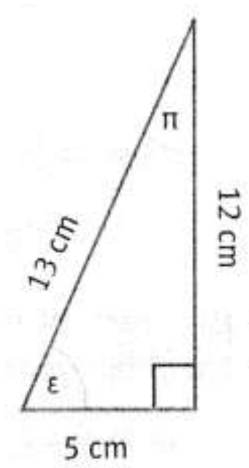
b) $\cos\varepsilon =$ $\Rightarrow \varepsilon \cong$

c) $\tan\varepsilon =$ $\Rightarrow \varepsilon \cong$

d) $\sin\pi =$ $\Rightarrow \pi \cong$

e) $\cos\pi =$ $\Rightarrow \pi \cong$

f) $\tan\pi =$ $\Rightarrow \pi \cong$



8) Hallar, con la calculadora, la razón trigonométrica correspondiente.

a) $\sin 25° =$

b) $\sin 47°\,°25'\,36'' =$

c) $\cos 54° =$

d) $\cos 18°\,14'\,50'' =$

e) $\tan 64° =$

f) $\tan 35°\,42'\,29'' =$

9) Hallar, con la calculadora, el ángulo correspondiente.

a) $\sin x = 0{,}35 \ \Rightarrow x \cong$

b) $\sin x = 1 \ \Rightarrow x \cong$

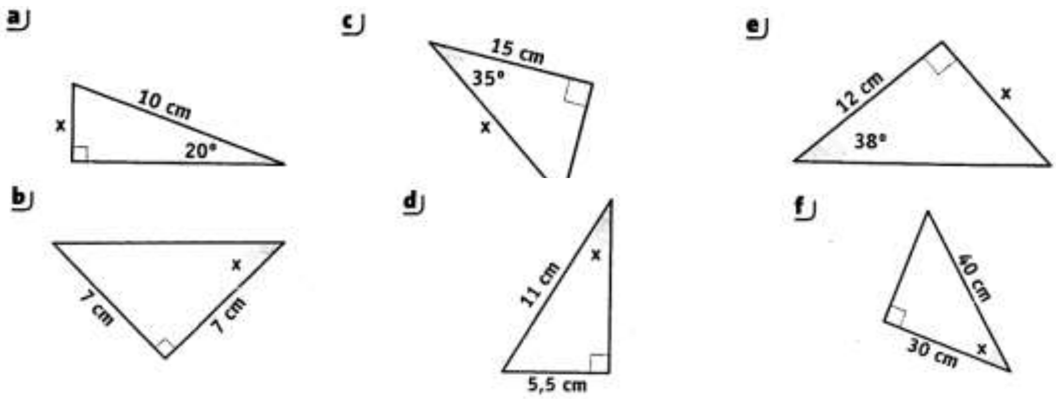
c) $\cos x = 0{,}82 \ \Rightarrow x \cong$

d) $\cos x = 0 \ \Rightarrow x \cong$

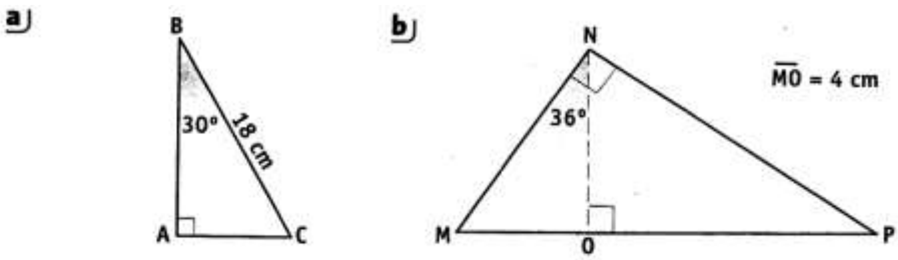
e) $\tan x = 1{,}2 \ \Rightarrow x \cong$

f) $\tan x = 1 \ \Rightarrow x \cong$

10) Hallar la medida de ***x*** en cada figura.



11) Hallar el perímetro y el área de los triángulos ABC y MNP.



12) Resolver los siguientes triángulos oblicuángulos, dadas las medidas de dos lados y el ángulo comprendido.

a) $\begin{cases} \mathrm{a} = 12\ \mathrm{m} \\ \mathrm{c} = 18\ \mathrm{m} \\ \alpha = 42°\ 25' \end{cases}$

b) $\begin{cases} \mathrm{b} = 15\ \mathrm{m} \\ \mathrm{c} = 9\ \mathrm{m} \\ \alpha = 123°\ 18' \end{cases}$

13) Resolver los siguientes triángulos oblicuángulos, dadas las medidas de un lado y los dos ángulos adyacentes a dicho lado.

a) $\begin{cases} \mathrm{a} = 24\ \mathrm{m} \\ \beta = 76°\ 40' \\ \gamma = 54°\ 26'\ 10'' \end{cases}$

b) $\begin{cases} \mathrm{c} = 50\ \mathrm{m} \\ \alpha = 109°\ 52' \\ \beta = 47° \end{cases}$

14) Resolver los siguientes triángulos oblicuángulos conociendo las medidas de sus tres lados.

a) $\begin{cases} a = 30\ m \\ b = 38\ m \\ c = 50\ m \end{cases}$

b) $\begin{cases} a = 72\ m \\ b = 47\ m \\ c = 64\ m \end{cases}$

15) En el triángulo abc, el lado ab mide 8 cm; el lado ac mide 12 cm y el ángulo c mide 30°. Calcular la medida de los ángulos a y b.

16) La base mayor de un trapecio isósceles mide 14 cm. Los lados no paralelos miden 10 cm y los ángulos de la base miden 80°. Encontrar la longitud de la diagonal y el área del trapecio.

17) Calcular la longitud de la diagonal de un pentágono regular de 5 cm de lado.

18) En un triángulo, dos de sus ángulos miden 50° y 68° respectivamente. El lado opuesto al mayor de ellos es de 10 cm ¿Cuál es la medida del segmento de bisectriz correspondiente al ángulo mayor?

19) ¿Cuál será la altura de una torre si el ángulo de elevación disminuye de 50° a 18° cuando un observador que está situado a una determinada distancia del pie de la torre se aleja 90 m en la misma dirección?

20) Desde el extremo más lejano del patio de una escuela los ángulos de elevación para observar el pie y el extremo de un mástil colocado sobre el edificio son de 60° y 65° respectivamente. Calcular la altura del edificio sabiendo que la longitud del mástil es de 3 m.

21) Desde la terraza de una confitería situada en el centro de una plaza a 12 m de altura se ve hacia el sur la calesita, bajo un ángulo de depresión de 20°, y hacia el oeste se ve el tobogán, bajo un ángulo d depresión de 14° ¿Cuál es la distancia entre la calesita y el tobogán?

22) Desde el balcón de un edificio se ve, con un ángulo d depresión de 48° 20´, un automóvil estacionado en la calle. Si desde el balcón de otro piso del mismo edificio, situado a 9,36 m más abajo que el anterior, el ángulo de depresión con que se ve el automóvil es de 25°:

a) ¿A qué distancia del edificio se encuentra estacionado el auto?

b) ¿A qué altura se encuentra el primer balcón?

23) Sin calcular el valor de α, encontrar todas las razones trigonométricas, utilizando la información que se da en cada caso.

a) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{20}}{5}$ y $90° < \alpha < 360°$

b) $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{26}}{26}$ y $\tan \alpha > 0$

c) $\cot \alpha = 1$ y $\csc \alpha < 0$

24) Si se sabe que α está en el primer cuadrante. Indicar con una cruz cuál de los siguientes pares de números pueden corresponder al coseno y a la tangente de α. Justificar.

a) $-\frac{1}{2}$; $\sqrt{3}$ ☐

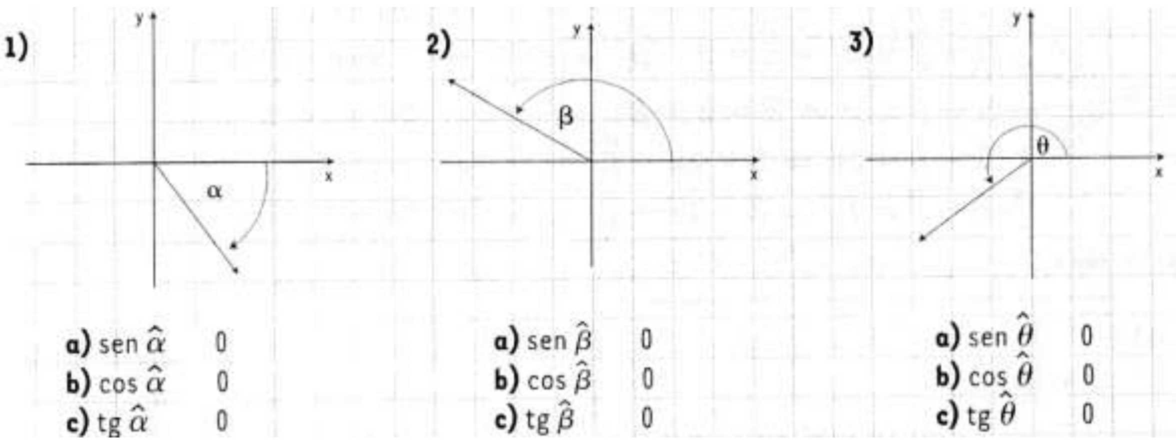
b) $\frac{1}{2}$; $-\sqrt{3}$ ☐

c) $\frac{1}{2}$; $\sqrt{3}$ ☐

25) Se sabe que $\sin \alpha = \sqrt{\frac{1}{2}}$ y $\tan \alpha = -1$ ¿En qué cuadrante puede estar α?

26) Se sabe que $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ y $\tan\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ ¿En qué cuadrante puede estar α?

27) Completar con > o < según corresponda en cada caso.



28) Escribir V (verdadero) o F (falso) según corresponda.

a) Si el coseno de un ángulo es negativo, el ángulo pertenece al tercer o cuarto cuadrante.

b) Si el coseno de un ángulo es negativo y el seno del mismo ángulo es positivo, el ángulo pertenece al segundo cuadrante.

c) Si la tangente de un ángulo es positiva, se puede asegurar que dicho ángulo pertenece al primer cuadrante.

d) Si un ángulo pertenece al tercer cuadrante, el seno de dicho ángulo es positivo.

e) Si el seno de un ángulo es positivo y la tangente es positiva, el ángulo pertenece al primer cuadrante.

29) Calcular el valor de las restantes funciones teniendo en cuenta los siguientes datos.

a) $\sin x = \frac{1}{2}\ y\ x \in 1°\ cuadrante$
b) $cos^2 x = \frac{1}{2}\ y\ x \in 3°\ cuadrante$
c) $\tan x = -\sqrt{3}\ y\ x \in 2°\ cuadrante$
d) $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}\ y\ x \in 4°\ cuadrante$

30) Marcar con una cruz las expresiones que resultan identidades trigonométricas.

a) $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$

b) $\sin\alpha + \cos\alpha = \tan\alpha$

c) $\tan\alpha\ .\ \cot\alpha = 1$

d) $\sin\alpha = 1 - \csc\alpha$

e) $\cos\alpha = (\sec\alpha)^{-1}$

f) $\sin\alpha + \cos\alpha = 1$

31) Resolver las siguientes identidades trigonométricas.

a) $\frac{1}{\sin\alpha\ .\ \cos\alpha} - \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \tan\alpha$

b) $\frac{\sin\varepsilon+\cos\varepsilon}{\csc\varepsilon+\sec\varepsilon} = \frac{\sin\varepsilon}{\sec\varepsilon}$

c) $\frac{\sec\pi+\tan\pi}{\cos\pi+\cot\pi} = \sec\pi\ .\ \tan\pi$

32) Demostrar las identidades.

a) $(1-\cos x)\,(1+\sec x)\ \cot x = \sin x$

b) $(1-\sin^2 x)\,(1+\tan^2 x) = 1$

c) $\sec^2 x\ .\ \csc^2 x = \sec^2 x + \csc^2 x$

d) $\csc^2 x\,.\,(1-\cos^2 x) = 1$

e) $1 - \frac{\cos^2 x}{1+\sin x} = \sin x$

f) $\sec^2 x\,(\csc^2 x - 1) = \csc^2 x$

g) $2\ \csc x = \frac{\sin x}{1+\cos x} + \frac{1+\cos x}{\sin x}$

h) $\frac{1}{\sec x+\tan x} = \sec x - \tan x$

i) $\frac{1-\sin x}{\cos x} = \frac{\cos x}{1+\sin x}$

j) $\frac{1}{1-\sin x} + \frac{1}{1+\sin x} = 2\sec^2 x$

k) $\frac{\sec x-\csc x}{\sec x+\csc x} = \frac{\tan x-1}{\tan x+1}$

l) $\frac{\tan x-\sin x}{\sin^3 x} = \frac{\sec x}{1+\cos x}$

m) $\frac{\sin x-\cos x+1}{\sin x+\cos x-1} = \frac{\sin x+1}{\cos x}$

n) $\frac{\sec x+\csc x}{\tan x+\cot x} = \sin x + \cos x$

o) $(1+\tan x)(1-\tan x) = 2 - \sec^2 x$

p) $\sec x - \cos x = \tan x\ .\ \sin x$

q) $\frac{1}{\sec x}\ .\cos x + \sin x\ .\ \frac{1}{\csc x} = 1$

r) $2 + \tan x\ .\cot x = 3$

s) $1 + \tan^2 x = \sec^2 x$

33) Encontrar los valores de $x \in [0°, 360°)$ que verifiquen las siguientes ecuaciones.

a) $\cos x = -1$

b) $\tan x = 1$

c) $\sqrt{2}\ \cos x = 1$

d) $3\ \tan x + \sqrt{3} = 0$

e) $\sec x = \sqrt{2}$

f) $2 - \cot x = \frac{1}{2}$

34) Algunas de las siguientes ecuaciones no tienen solución. Descubrir cuáles y explicar por qué.

a) $\sin x = -0{,}7$

b) $\cos x = 1{,}5$

c) $\tan x = 1000000$

d) $\sec x = \frac{1}{2}$

e) $\csc x = -50$

f) $\cot x = 2$

35) Encontrar los valores de $x \in [0°, 360°)$ que verifiquen las siguientes ecuaciones.

a) $2\ \cos x - 1 = 0$

b) $4\cos^2 x - 1 = 0$

c) $\cos(x + 15°) = \frac{1}{2}$

d) $\tan x - \sqrt{3} = 0$

e) $\cos^2 x - 2\ \cos x + 1 = 0$

f) $\cos^2 x + 3 = 2\ \cos x\ \ (1 + \sec x - \tan x\ .\ \sin x)$

36) Resolver las siguientes ecuaciones para $x \in [0\ ;\ 2\pi)$.

a) $2\cos^2 x + 3\ \cos x + 1 = 0$

b) $\sin^2 x + \frac{7}{2}\ \sin x = 2$

c) $\sin^2 x - 7\ \sin x = 0$

d) $\sqrt{3}\cos^2 x - \frac{3}{2}\ \cos x = 0$

37) Resolver las ecuaciones, expresando cada una en forma de una sola función trigonométrica.

a) $\sin x - 2\ \sin x\ \ \cos x = 0$

b) $2\tan^2 x + \sec^2 x = 2$

c) $\sec x + \tan x = 0$

d) $\sin x + \cos x = 1$

e) $\sin x\ .\ \cos x = 0$

f) $(\tan x - 1)\ (4\sin^2 x - 3) = 0$

g) $3\cos^2 x = \sin^2 x$

h) $2\ \sin x - \csc x = 1$

i) $2\ \sec x = \tan x + \cot x$

ANEXO

Símbolos

Símbolo	Significado
$=$	igual
$<$	menor que...
$\leq$	menor o igual que...
$>$	mayor que...
$\geq$	mayor o igual que...
$\neq$	distinto
$\approx$	aproximadamente igual
$\equiv$	idénticamente igual
$\pm, \mp$	más menos / menos más
Σ	sumatorio
Π	producto
$\forall$	para todo, cuantif. universal
$\exists$	existe, cuantif. existencial
$\Rightarrow$	implica (si ... entonces ...)
$\Leftrightarrow$	equivale (si y solo si)
$/$	tal que
$\therefore$	por lo tanto, por consiguiente
$\because$	porque, puesto que
$\neg$	negación
$\wedge$	conjunción ("y", "además")
$\vee$	disyunción ("o")
∞	infinito
$:$	razón
$::$	proporción

Símbolo	Significado
$\mathbb{N}$	conjunto de los números naturales
$\mathbb{Z}$	conjunto de los números enteros
$\mathbb{Q}$	conjunto de los números racionales
$\mathbb{R}$	conjunto de los números reales
$\mathbb{C}$	conjunto de los números complejos
$\mathbb{R}^+$	conjunto de los reales positivos
$\{a, b, \ldots\}$	conjunto de elementos a,b,...
$\varnothing$	conjunto vacío
$\cap, \bigcap$	intersección de conjuntos
$\cup, \bigcup$	unión de conjuntos
$\subset$	incluido en el conjunto
$\not\subset$	*no* incluido en el conjunto
$\in$	pertenece a un conjunto
$\notin$	*no* pertenece a un conjunto
$A \setminus B,\ A - B$	conjunto diferencia
$\wp(A)$	conjunto de partes
$n(A)$	cardinal del conjunto
$A',\ \overline{A}$	conjunto complementario de A
$A \times B$	producto cartesiano
$\{x \mid x \in P\}$	todos los x que satisfacen P
$\{x : \ldots\}$	todos los x tales que ... es cierto
(a, b)	intervalo abierto
$[a, b]$	intervalo cerrado
$[a, b), (a, b]$	intervalo semiabierto
$(a, \infty), [a, \infty)$	semirrecta derecha
$(-\infty, a), (-\infty, a]$	semirrecta izquierda
$(-\infty, \infty)$	recta real

Símbolo	Significado
$n!$	factorial
$\lvert x \rvert$	valor absoluto
$\sqrt{\ }$	raíz cuadrada
$\%$	tanto por ciento
‰	tanto por mil
π	número pi, $\pi = 3{,}1415\ldots$
e	número e, $e = 2{,}7182\ldots$
ϕ	número fi (áureo), $\phi = 1{,}6180\ldots$
$\parallel$	paralelo
$\perp$	perpendicular
$\measuredangle$	ángulo
$\binom{m}{n}$	número combinatorio
C_m^n	Combinaciones
P_m	permutaciones
V_m^n	variaciones
$\log$	logaritmo decimal
$\log_a$	logaritmo de base a
$\ln$	logaritmo neperiano (base e)
$\sin\alpha$	seno de α
$\cos\alpha$	coseno de α
$\tan\alpha$	tangente de α
$\cot\alpha$	cotangente α
$\sec\alpha$	secante α
$\csc\alpha$	cosecante α
(a_n)	sucesión con término n-ésimo
Δ	incremento
σ	desviación típica

POTENCIACION
$a^0 = 1;\quad a \in \mathcal{R}$
$a^1 = a;\quad a \in \mathcal{R}$
$a^n . a^m = a^{n+m};\quad a \in \mathcal{R} \wedge n,m \in \mathcal{Z}$
$\dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m};\quad a \in \mathcal{R} \wedge n,m \in \mathcal{Z}$
$(a.b)^n = a^n . b^n;\quad a \in \mathcal{R} \wedge n \in \mathcal{Z}$
$(a^n)^m = a^{n.m}.;\quad a \in \mathcal{R} \wedge n,m \in \mathcal{Z}$
$\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}};\quad a \in \mathcal{R} \wedge n,m \in \mathcal{Z}$
$a^{-n} = \dfrac{1}{a^n};\quad a \in \mathcal{R} \wedge n \in \mathcal{Z}$
$(a \pm b)^n = a^n \neq b^n;\quad a,b \in \mathcal{R} \wedge n \in \mathcal{Z}$

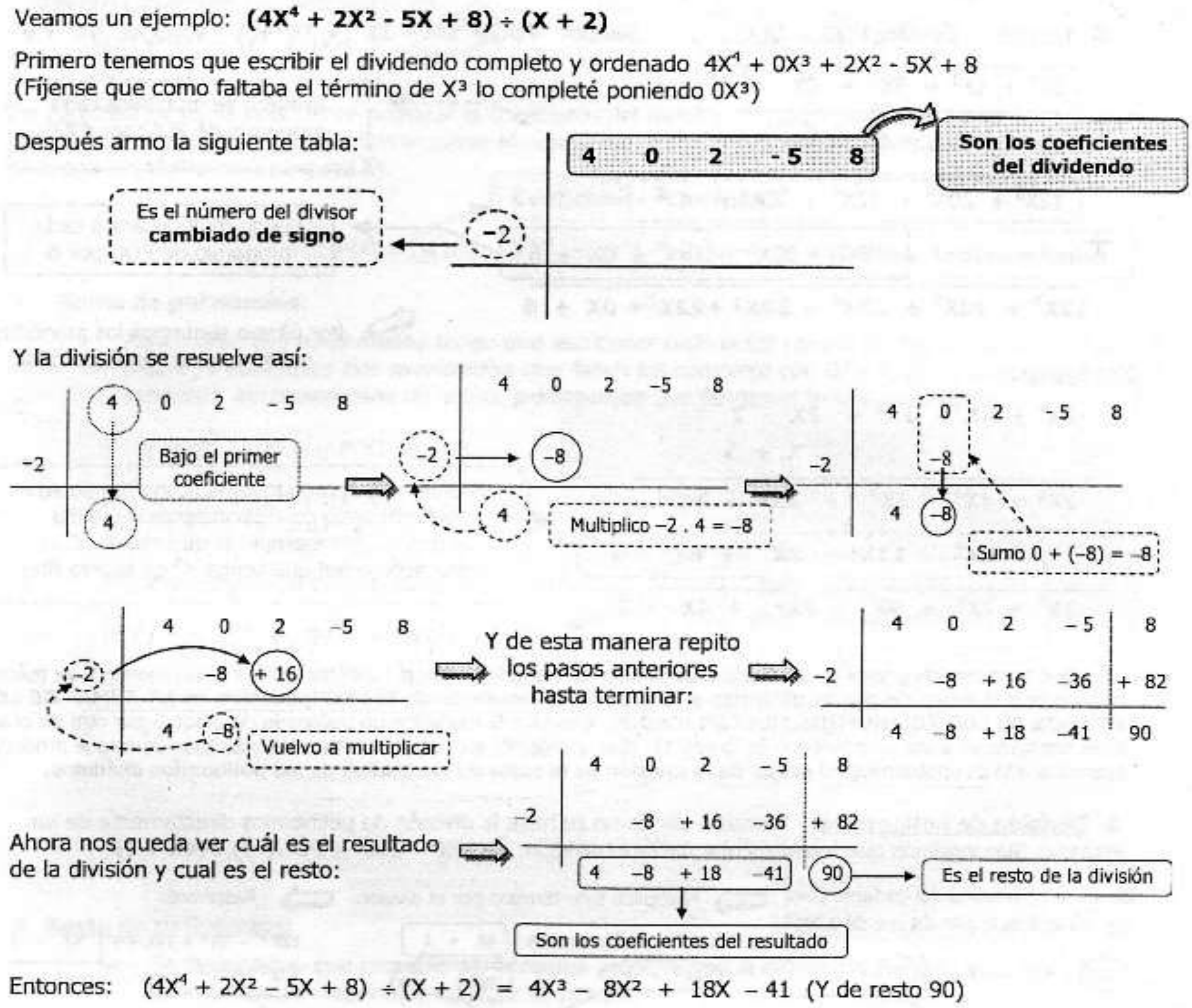
RADICACION
$\sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a.b};\quad a,b \in \mathcal{R}^+ \wedge n \in \mathcal{N}$
$\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}};\quad a,b \in \mathcal{R}^+ \wedge n \in \mathcal{N}$
$(\sqrt[n]{a})^m. = \sqrt[n]{a^m};\quad a \in \mathcal{R}^+ \wedge n,m \in \mathcal{N}$
$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}. = \sqrt[m.n]{a};\quad a \in \mathcal{R}^+ \wedge n,m \in \mathcal{N}$
$\sqrt[n]{a \pm b} \neq \sqrt[n]{a} \pm \sqrt[n]{b};\quad a,b \in \mathcal{R}^+ \wedge n \in \mathcal{N}$

- <u>División de polinomios</u>

Dividir un polinomio $D(x)$ llamado dividendo, por otro $d(x)$, llamado divisor, es encontrar dos expresiones algebraicas $C(x)\ y\ R(x)$, llamada cociente y resto respectivamente; tales que el dividendo es igual al producto del divisor por el cociente, más el resto. Y el grado del resto menor que el grado del divisor.

$$D(x) = d(x).C(x) + R(x)$$

Regla de Ruffini: es un método abreviado para realizar divisiones en los que el divisor es de la forma (x+a) con a $\in \mathbb{R}$



Veamos un ejemplo: **$(4X^4 + 2X^2 - 5X + 8) \div (X + 2)$**

Primero tenemos que escribir el dividendo completo y ordenado $4X^4 + 0X^3 + 2X^2 - 5X + 8$
(Fíjense que como faltaba el término de X^3 lo completé poniendo $0X^3$)

Después armo la siguiente tabla:

	4	0	2	-5	8
-2					

Son los coeficientes del dividendo

Es el número del divisor **cambiado de signo**

Y la división se resuelve así:

Bajo el primer coeficiente

Multiplico $-2 \cdot 4 = -8$

Sumo $0 + (-8) = -8$

Vuelvo a multiplicar

Y de esta manera repito los pasos anteriores hasta terminar:

	4	0	2	-5	8
-2		-8	+16	-36	+82
	4	-8	+18	-41	90

Ahora nos queda ver cuál es el resultado de la división y cual es el resto:

Son los coeficientes del resultado: 4 −8 +18 −41

Es el resto de la división: 90

Entonces: $(4X^4 + 2X^2 - 5X + 8) \div (X + 2) = 4X^3 - 8X^2 + 18X - 41$ (Y de resto 90)

- Teorema del Resto

El resto de la división de un polinomio entero en x por otro de la forma (x + a) es el valor numérico del polinomio dividendo para x = - a

El teorema del Resto sirve para calcular el resto de una división sin tener que hacer la misma. Por lo tanto es muy útil para establecer si dos polinomios son divisibles. En el caso tratado anteriormente procedemos así:

$P(x) = 4x^4 + 2x^2 - 5x + 8$
$P(-2) = 4(-2)^4 + 2(-2)^2 - 5(-2) + 8$
$P(-2) = 4.16 + 2.4 + 10 + 8 = 90$

TEOREMA DEL SENO

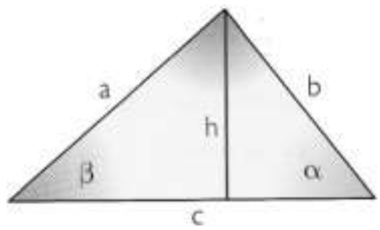
El triángulo abc es oblicuángulo y h es una de sus alturas.
Al observar la figura se puede determinar que:

$\text{sen}\,\alpha = \frac{h}{b}$ $\quad\quad$ $\text{sen}\,\beta = \frac{h}{a}$

$h = b\,.\,\text{sen}\,\alpha$ $\quad\quad$ $h = a\,.\,\text{sen}\,\beta$

Entonces: $b\,.\,\text{sen}\,\alpha = a\,.\,\text{sen}\,\beta$

De donde se concluye que: $\frac{a}{\text{sen}\,\alpha} = \frac{b}{\text{sen}\,\beta}$

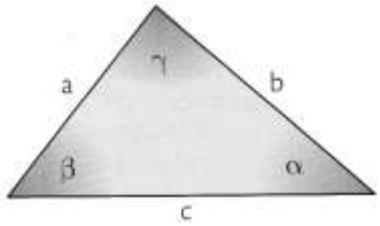


Esta relación puede extenderse a los tres lados del triángulo y es la que enuncia el teorema del seno: **en todo triángulo oblicuángulo los lados son directamente proporcionales a los senos de los ángulos opuestos.**

TEOREMA DEL COSENO

El triángulo abc es oblicuángulo, en el se verifica que:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,bc \cos \alpha$



En todo triángulo oblicuángulo el cuadrado de cada lado es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos, menos el doble del producto de ellos por el coseno del ángulo que determinan.

IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS

Las identidades trigonométricas son igualdades en las cuales aparecen razones trigonométricas y resultan verdaderas para cualquier valor de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo.

Para demostrar o resolver una identidad trigonométrica se desarrollan uno o ambos miembros de la misma, tratando de obtener expresiones equivalentes. Para ello se utilizan las relaciones que se establecen entre las razones trigonométricas de un mismo ángulo.

Algunas equivalencias que sirven para resolver identidades trigonométricas son:

$$sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1$$
$$tg\ \alpha = \frac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha}$$
$$cosec\ \alpha = \frac{1}{sen\ \alpha}$$
$$sec\ \alpha = \frac{1}{cos\ \alpha}$$
$$cotg\ \alpha = \frac{1}{tg\ \alpha}$$

ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS

Como las funciones trigonométricas son periódicas y sus valores se repiten cíclicamente, es habitual que las ecuaciones que las involucran tengan infinitas soluciones que también se repiten cíclicamente.

En las siguientes actividades sólo se buscarán las soluciones que pertenezcan al intervalo $[0° ; 360°]$ o, equivalentemente, $[0 ; 2\pi]$.

Ejemplo:

$sen\ x = \frac{1}{2}$ ($x \in [0° ; 360°]$)

- Una solución es $x_1 = 30°$ (se encuentra calculando $sen^{-1}\ 30°$)
- Con las gráficas trigonométricas se analiza si existen otros valores de x que verifiquen la igualdad. Por consideraciones de simetría, se observa que $x_2 = 150°$ es un ángulo cuyo seno es igual al de x_1. por lo tanto es otro valor que pertenece al intervalo indicado y también cumple la igualdad.
- Se comprueba que $sen\ 30° = \frac{1}{2}$ y $sen\ 150° = \frac{1}{2}$.
- Analizando las tres gráficas principales de las funciones llegamos a las siguientes conclusiones:

$$sen\alpha = sen(180° - \alpha)$$
$$cos\alpha = \cos(360° - \alpha)$$
$$tg\alpha = tg\ (\alpha + 180°)$$

Bibliografía

- ABDALA, C. Y OTROS. (2010) *Nueva Carpeta de Matemática.* Ed. Aique.
- ALTMAN, SILVIA Y OTROS. (2015) *Matemática 3 "Números y sucesiones"*. Ed. Longseller.
- BERIO ADRIANA Y OTROS. (2014) *Activados Matemática*. Ed. Puerto de Palos.
- CAMUYRANO, M. (2000) *Matemática I: Modelos matemáticos para interpretar la realidad.* Ed. Estrada.
- SEGAL, S., GIULIANI, D. (2008) *Modelización matemática en el aula. Posibilidades y necesidades.* Libros del Zorzal.
- BOCCIONI, MARIELA, TABAJ, ALICIA Y VIGIONE, YÉSICA. (2017) *Activados Matemática*. Ed. Puerto de Palos.
- FIORITI, MARÍA DORA, ÁLVAREZ, SILVIA, FANOVICH, VIVIAN, PANDOLFI, CAROLINA Y OTROS. *Matemática para el Curso de Ingreso 2014.* Facultad de Ciencias Económicas y Sociales. UNMDP.

Documentos

- Aporte para la enseñanza. Nivel medio. Geometría. 2007. Gobierno de la Ciudad de Bs As Disponible en:

https://www.buenosaires.gob.ar/areas/educacion/curricula/media/matematica/geometria_media.pdf

Recursos web

- https://www.geogebra.org/m/sVnjTqKU[10/12/2019]
- http://sextodeprimariaedublog.blogspot.com/2013/04/t10-mates-base-y-altura-de-triangulos-y.html[12/12/2019]
- http://yepeandoensextoa.blogspot.com/2014/05/videos-alturas-de-las-bases-de-varios.html[12/12/2019]
- https://www.vitutor.com/di/p/proporcionalidad.html
- https://www.vitutor.com/ab/p/polinomios.html
- https://www.vitutor.com/ecuaciones/1/ecuaciones_2.html
- https://www.vitutor.com/ecuaciones/sistemas/sistemas_ecuaciones.html
- https://www.vitutor.com/al/trigo/trigonometria_eso.html
- https://www.vitutor.com/di/re/numeros_reales.html
- https://www.sectormatematica.cl/contenidos.htm
- https://www.sectormatematica.cl/contenidos/funconc.htm
- https://www.sectormatematica.cl/geometria2.htm